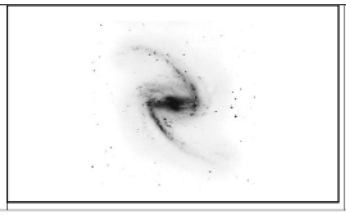
IV Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії м. Львів, 23-27 березня 2014 р.		Теоретичний тур 10 клас

Завдання 1 (10 балів)

Мінімальний період пульсара. Знайдіть мінімальний період пульсара. Вважайте, що його середня густина дорівнює ядерній густині ($2{,}8\cdot10^{17}$ кг/м^3).

Розв'язок

Відомо, що пульсар — це нейтронна зоря, яка дуже швидко обертається навколо своєї осі й має надпотужне магнітне поле. Граничну кутову швидкість обертання ω_{max} можна отримати, прирівнюючи відцентрову силу на екваторі нейтронної зорі силі тяжіння:

$$m\omega_{\max}^2 R = \frac{GMm}{R^2} \ .$$

Якщо нейтронна зоря буде обертатися швидше, ніж з ω_{max} , то відцентрова сила розірве її. Тоді для мінімального періоду обертання знаходимо

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \ .$$

За розрахунками для $\rho = 2{,}8\cdot10^{17}$ кг/м^3 дістаємо $T_{\min} = 0{,}7$ мс. Зазначимо, що відомий найкороткоперіодичніший пульсар PSR 1937-214 має період 1,5 мс.

Завдання 2 (8 балів)

Неділі в лютому. В яких роках XXI століття в лютому буде 5 неділь?

Розв'язок

Зазначимо, що 5 неділь в лютому може бути тільки в тому випадку, якщо рік буде високосним (т.т. у лютому буде 29 днів) і 1-го і 29-го лютого будуть неділями.

Вияснимо, як змінюються тижні, які відповідають 1 лютому, з року в рік. Так як у звичайному (не високосному) році 365 днів, 365 при діленні на 7 дає в остачі 1, то це означає, що в році, який слідує за не високосним , день неділі, відповідний 1 лютому, зсовується на один вперед. Аналогічним чином отримуємо, що в році, який слідує за високосним, зсув відбувається на два дні тижня вперед. В кожній групі з чотирьох років три не високосні роки і один високосний, тому за чотири роки 1 лютого зсунеться на п'ять днів вперед (або, що те саме, на два дні неділі назад).

1 лютого 2014 року — субота, 1 лютого 2015 року — неділя, 1 лютого 2016 року — понеділок, 1 лютого 2020 року — субота, 1 лютого 2024 року — четвер, 1 лютого 2028 року — вівторок, і, нарешті, 1 лютого 2032 року — неділя. В зворотньому напрямку від 2016 року: 1 лютого 2012 року — середа, 1 лютого 2008 року — пятниця, 1 лютого 2004 року — неділя. Отже, повторюваність 5 неділь в лютому — через 28 років.

Отже, у XXI столітті 5 неділь в лютому є у 2004, 2032, 2060, 2088 роках.

Завдання 3 (10 балів)

Кратер на Марсі. Кілька років тому на Марсі з'явився новий ударний кратер, зображення якого було отримано за допомогою камери високої роздільної здатності апарату Mars Reconnaissance Orbiter (NASA). Речовина, що була викинута при падінні метеориту, утворила систему променів радіусом 15 кілометрів.

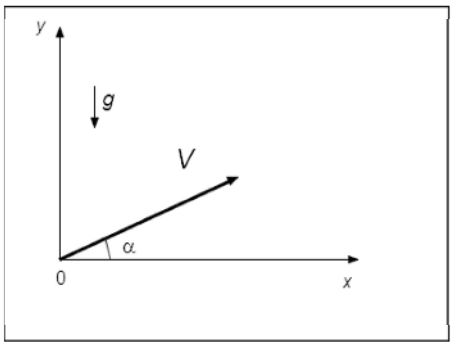
Визначити максимальну швидкість речовини, що утворила промені. Розрахувати, на яку відстань при падінні подібного метеориту буде викинута речовина на Меркурії.

Маса Марса $0.64185 \cdot 10^{24}$ кг, середній радіус Марса 3 385 км.

Маса Меркурія $0.32868 \cdot 10^{24}$кг, середній радіус Меркурія 2440 км.

Розв'язок

Щільність атмосфери Марса досить невелика, тобто опором повітря можна знехтувати. Довжина променя 15 кілометрів значно менша від розміру Марса і ми можемо вважати, що кратер утворився на горизонтальній площині.
Розглянемо рух частики, швидкість якої направлена під довільним кутом α до горизонтальної площини (Мал. 1). Рух у горизонтальному напрямку є рівномірнім, а у вертикальному – рівноприскореним.



Мал.1.

1) Прискорення вільного падіння на Марсі визначаємо за формулою

$$g = G\frac{m}{R^2} = 6.67384 \cdot 10^{-11} \left. м^3 \middle/ кг \cdot с^2 \right. \times \frac{6.4185 \cdot 10^{23}\, кг}{(3.3895 \cdot 10^{6}\, м)^2} = 3.72\, м/с^2$$

2) Час руху частинки визначається з $V = V_0 + gt$, причому у верхній точці траєкторії $V_1 = 0$, а з врахуванням знаків час руху до верхньої точки траєкторії $t_1 = \frac{V \sin\alpha}{g}$, а повний час руху *t* в 2 рази більший.
Частинки впадуть на поверхню на відстані

$$S = V\cos\alpha \cdot t = V\cos\alpha 2\frac{V\sin\alpha}{g} = 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{V^2}{g} = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha$$

Максимальною дальність польоту частинок буде коли $\sin 2\alpha = 1$; вектор їх швидкості буде направлений під кутом 45º до площини горизонту. Довжина променя є

$$l = \frac{V^2}{g} \qquad (1)$$

Тоді: $$V=\sqrt{l\cdot g}=\sqrt{G\frac{lm}{R^2}}=\frac{\sqrt{Glm}}{R}\ ;\quad [V]=\sqrt{\frac{м^3\cdot м\cdot кг}{кг\cdot с^2\cdot м}}=\frac{м}{с}$$

$$V=\frac{\sqrt{6.67384\cdot 10^{-11}\times 15\cdot 10^3\times 6.4185\cdot 10^{23}}}{3.3895\cdot 10^6}=236.5\left[\frac{м}{с}\right]$$

Падіння метеориту на Меркурій.

Частинки речовини мають таку ж швидкість, як й на Марсі, опором атмосфери нехтуємо. Для Меркурія співвідношення (1) є коректним.

$$l_1=\frac{V^2}{g_1}=l\frac{g}{g_1}=l\frac{G\frac{m}{R^2}}{G\frac{m_1}{R_1^2}}=l\frac{mR_1^2}{m_1R^2}$$

$$l_1=15\cdot 10^3\frac{6.4185\cdot 10^{23}\times(2.440\cdot 10^6)^2}{3.2868\cdot 10^{23}\times(3.3895\cdot 10^6)^2}=15\cdot 10^3\frac{6.4185}{3.2868}\cdot\left(\frac{2.440}{3.3895}\right)^2=15.1\cdot 10^3[м]$$

Відповідь: на Меркурії за аналогічних обставин утворюється практично така ж сама за розміром променева система: довжина променя є 15.1 *км.*

Примітка. Прискорення вільного руху на Марсі та Меркурії практично однакові: 3.72 м/с² на Марсі та 3.7 м/с^2 на Меркурії.

Завдання 4 (12 балів)

Сіріус В. Фрідріх Вільгельм Бессель, спостерігаючи за Сіріусом і Проціоном, зауважив, що ці зорі пересуваються не прямолінійно. Із чого у 1844 року він зробив висновок, що обидві зорі мають невидимих компаньйонів. 31-го січня 1862 року американський астроном і виробник телескопів Алван Грекхем Кларк, тестуючи новий телескоп, відкрив другий компонент Сіріуса — Сіріус В 8,30 зоряної величини. Ця зоря є першим відкритим білим карликом. За даними телескопа Габбла її діаметр ~ 12000 км (тобто трохи менший за Землю), маса становить 98% від сонячної, відстань до Сіріуса ~ 20 астрономічних одиниць.

Згодом було відкрито другий компаньйон Проціона — Проціон В — тьмяний білий карлик віддалений від Проціона на відстань 16 астрономічних одиниць. Він аналогічний білому карлику у Сіріуса, проте його видимий блиск дорівнює 10^m,75.

Чи можливо візуально спостерігати Сіріус В та Проціон В у телескоп з діаметром дзеркала або лінзи 50 мм, що має фокусну відстань F = 400 мм, і обладнаний окуляром із фокусною відстанню f = 10 мм? Відповідь обгрунтувати розрахунками.

Примітка: Неозброєне людське око на нічному небі здатне бачити зорі до 6 зоряної величини, а також може розрізнити предмети (зорі на небі, літери в підручнику, тощо), якщо вони рознесені на кутову відстань не меншу ніж одна кутова мінута. Діаметр зіниці ока у темряві рівний 0.8 см.

Розв'язок

1) Оцінюємо кутову відстань між компонентами подвійних систем: Оскільки 1 пк = 180·60·60/pi = 206264.8 а.о., то кутова відстань між Сіріусом та Сіріусом В на максимальному візуальному віддалені становить 20 а.о. /(206264.8 а.о. · 2.6 пк) = 0.00003729 радіан = 7.7″. Кутова відстань між Проціоном та Проціоном В на максимальному візуальному віддалені становить 16 а.о. /(206264.8 а.о. · 3.5 пк) = 0.00003729 радіан = 4.6″.
2) Неозброєне око людини може розпізнати дві окремі зорі віддалені на відстань приблизно більшу ніж 1′ = 60″. Через телескоп людське око здатне розпізнати зорі на кутовій відстані більшій ніж 60″/G = 1.5″, де G = F/f — збільшення телескопа. Тобто наш телескоп здатен розділити обидві подвійні системи на компоненти, якщо видима кутова відстань між ними буде більшою 1.5″.
3) Щоб зорю можна було розгледіти, її зоряна величина повинна бути менша або рівна шести ($m \leq 6$). Телескоп збільшує потік світла від зорі в I/I_0 = (D/8 мм)2 разів у порівняні із потоком, який потрапляє в неозброєне око людини з діаметром зіниці 8 мм. Тому зоря величини m_0 у телескоп виглядатиме як зоря величини $m = -2.5 \cdot \lg(I/I_0) + m_0 = -5 \cdot \lg(D/8 \text{ мм}) + m_0$. Сіріус В в окулярі телескопа із діаметром дзеркала D = 300 мм матиме зоряну величину $m = -5 \cdot \lg(300 \text{ мм}/8 \text{ мм}) + 8.3 = 4.32$ (< 6), а Проціон В зоряну величину $m = -5 \cdot \lg(50 \text{ мм}/8 \text{ мм}) + 10.75 = 6.8$ (> 6).

Отже, у телескоп з діаметром дзеркала або лінзи 50 мм, що має фокусну відстань F = 400 мм, і обладнаний окуляром із фокусною відстанню f = 10 мм візуально можна розгледіти Сіріус В в моменти, коли візуальна відстань між ними перевищує 1.5″. Візуально спостерігати Проціон В у такий телескоп неможливо (через його малу світність).

Завдання 5 (10 балів)

ШСЗ. Орбіта штучного супутника Землі (ШСЗ) лежить в площині екватора. Лазерно-локаційній станції (ЛЛС), розміщеній на широті 49о, вдалося виміряти найкоротший для цієї ЛЛС проміжок часу між випромінюванням лазерного променя і його реєстрацією після відбиття від супутника (500 мс) для найвіддаленішої точки орбіти. Відомо, що період обертання ШСЗ становить 30.5 год. Знайти на яку найближчу віддаль наближається супутник до поверхні Землі? Якої найбільшої швидкость досягає цей ШСЗ при русі по своїй орбіті, якщо відомо, що найменша швидкість на ній становить 1.5 км/с? Землю вважати сферично-симетричною з однорідним розподілом густини та радіусом 6371км. Сповільненням променя у Земній атмосфері знехтувати.

Розв'язок

Відстань виміряна ЛЛС $l=ct/2=75000км$. Нехай $R_З=6371км$ — радіус Землі.
З умови задачі випливає, що у момент локації ЛЛС і супутник перебували у площині перпендикулярній до площини орбіти (і екватора).
Тоді відстань від центру Землі (силового центру) до афелію :

$$R_{max}=(l^2 — R_З^2 \sin^2\varphi)^{0.5}+ R_З \cos\varphi = 79026 км.$$

З третього закону Кеплера, порівнюючи з Місяцем, велика піввісь орбіти буде:

$$a=a_M *(T/T_M)^{2/3}= 384400км*(30.5 *3600/(27.322*86400))^{2/3} = 49716 км.$$

Отже відстань від перигелію до центру Землі:

$$R_{min}=2a — R_{max} = 2*49716-79026=20406 км.$$

А відстань до поверхні буде $R_{min} - R_З$ = ***14035 км.***

Максимальною швидкість буде в перигелії ($v_П$), мінімальна — в афелії (v_A).
З другого закону Кеплера:

$$v_П / v_A = R_{max}/ R_{min}$$
$$v_П = v_A R_{max}/ R_{min} = 1.5км/с * 3.87 = \mathbf{5.8\ км/с}.$$