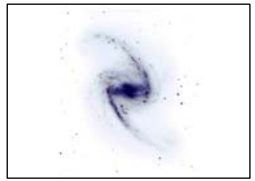


<p>III Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p>м. Київ, 24-28 березня 2013 р.</p>		<p>Теоретичний тур</p> <p>11 клас</p>
---	---	---------------------------------------

### Задача 1

**Альфа Центавра.** Як відомо,  $\alpha$  Центавра – найближча до нас зоряна система. Вона складається з трьох компонентів. Два з них,  $\alpha$  Центавра А та  $\alpha$  Центавра В – зорі головної послідовності, по характеристикам близькі до Сонця, рухаються навколо центру мас на середній відстані 23,4 а.о. один від одного. Третій компонент, Проксима, – червоний карлик, який, за припущенням, рухається навколо компонентів А та В по орбіті з радіусом 15 000 а.о. і періодом 500 000 років або більше. Це припущення базується на дуже схожих векторах їх просторової швидкості. Зараз Проксима є найближчою до нас зорею системи  $\alpha$  Центавра. Оцінити:

1. Коли система  $\alpha$  Центавра буде знаходитись найближче до Сонячної системи (якщо вектор її швидкості має постійне значення)?
2. Чи зможемо ми колись розрізнити Проксиму неозброєним оком?

При розв'язанні використовувати дані про систему  $\alpha$  Центавра:

		$\alpha$ Центавра А+В	Проксима
Променева швидкість, км/с		-21,6	-21,7
паралакс, "		0,74723	0,7687
координати	$\alpha$	$14^{\text{h}}39^{\text{m}}37^{\text{s}}$	$14^{\text{h}}29^{\text{m}}43^{\text{s}}$
	$\delta$	$-60^{\circ}50'02''$	$-62^{\circ}40'46''$
власний рух, "	$\mu_{\alpha}$	-3,67819	-3,7754
	$\mu_{\delta}$	0,48184	0,76933
зоряна величина		-0,27	11,05

(10 балів)

### Розв'язок

1. Спочатку знаходимо відстань до системи  $\alpha$  Центавра АВ:  
 $r_{AB} = 1/\rho = 1,338 \text{ пк} = 276040 \text{ а.е.}$  (де  $\rho$  – паралакс).

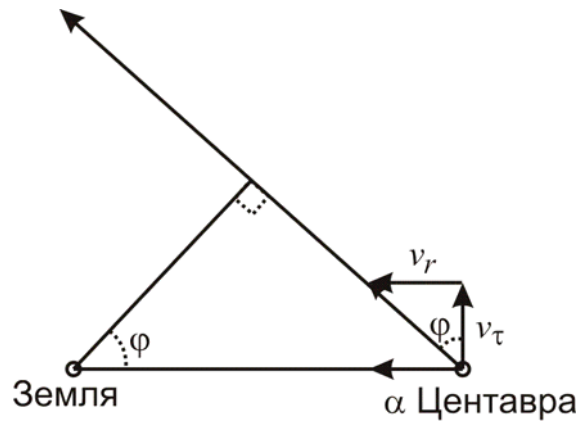
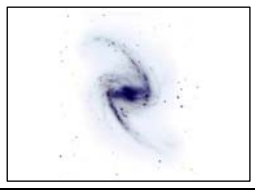
Далі з компонентів власного руху знаходимо тангенціальну швидкість:

$$v_{\tau} = \frac{r_{AB}}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \sqrt{\mu_{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \mu_{\delta}^2} = 2,48 \text{ а.о./рік.}$$

В тих самих одиницях модуль променевої швидкості:  
 $v_r = 21,6 \text{ км/с} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25 / 1,5 \cdot 10^8 = 4,54 \text{ а.о./рік.}$

Модуль загальної швидкості  $v_{AB} = \sqrt{v_r^2 + v_{\tau}^2} = 5,18 \text{ а.о./рік}$  (3 бали).

Оскільки радіальна швидкість від'ємна, система наближається до нас. Вона наблизиться на найменшу відстань, коли вся її швидкість перейде до тангенціальної, а променева буде дорівнювати нулю (див рис.)



З рисунка видно, що відстань, яку система пройде до максимального наближення:  $l = r_{AB} \sin \varphi$ , де  $\varphi = \arctg \frac{v_r}{v_t}$ . Пройде вона її за час  $t = \frac{r_{AB} \sin \varphi}{v_{AB}} = 46769$  р. (3 бали).

2. З променевої швидкості Проксими ми бачимо, що вона наближується до нас швидше, ніж система  $\alpha$  Центавра АВ. Відстань до неї (обчислена аналогічно) на 7700 а.о. менша, ніж до  $\alpha$  Центавра АВ. Якщо припустити, що це є результатом її руху по зазначеній орбіті, то за 46769 років вона пройде невелику частину своєї орбіти (десь приблизно 1/8). У будь-якому випадку її відстань до нас  $r_{min}$  буде між  $r_{minAB}$  та  $r_{minAB} - 15000$  а.о. Оскільки  $r_{minAB} = r_{AB} \cos \varphi = 132400$  а.о., то, використовуючи формулу Погсона, отримуємо

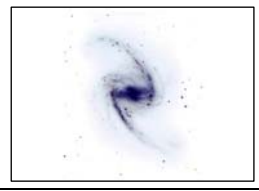
$$m = 11,05 - 5 \cdot \lg \left( \frac{r_{AB} - 7700}{r_{min}} \right)$$

Це дає значення зоряної величин в межах 9,4–9,5. (Аналогічний розрахунок зоряної величини Проксими, якщо вона рухається, як окрема зоря з наведеними компонентами швидкості, також дає значення зоряної величини на мінімальній відстані приблизно  $9,3^m$ .)

Таку зорю ми не зможемо побачити неозброєним оком (4 бали).

**Відповіді:**

1. Через 47769 років.
2. Не зможемо через слабкість блиску: близько 9-ої зоряної величини.



*Задача 2*

**Рентгенівський пульсар.** Подвійна система зір з масами  $m_1=12 M_{\text{sun}}$ ,  $m_2=3 M_{\text{sun}}$  має орбітальний період  $P_{\text{орб}}=12$  діб. Менш масивний компонент є рентгенівським пульсаром з власним періодом пульсацій  $P_o=0,15$  с (у системі відліку, в якій він є нерухомим). Знайти відносну зміну періоду пульсара внаслідок ефекту Доплера. Орбіта пульсара є коловою, промінь зору спостерігача лежить в площині орбіти.  
(12 балів)

**Розв'язок**

Ефект Доплера виникає внаслідок руху пульсара по орбіті. Тому треба знайти швидкість  $V$  орбітального руху пульсара. Її можна визначити за формулою  $V=2\pi r/P_{\text{орб}}$ , де  $r$  – відстань пульсара від центра мас подвійної системи. Тут треба використати третій закон Кеплера. Спочатку оцінюємо велику піввісь орбіти подвійної системи. Для подвійної зоряної системи третій закон Кеплера можна представити у вигляді  $\frac{a^3}{P^2} = (m_1 + m_2) \frac{G}{4\pi^2}$  (4 бала)  $a = \sqrt[3]{\frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \cdot P^{2/3}}$  – велика піввісь, яка дорівнює сумі відстаней компонент від центра мас ( $a=r_1 + r_2$ ), де  $r_1$  та  $r_2$  – відстані компонент від центру мас системи.

За умовами задачі після підстановки маємо  $a=0,25$  а.од.

Радіус орбіти пульсара звідси буде рівним  $\frac{r}{a} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  ;

$r = 0.8 a = 0.2$  а.од. (3 бала).

Тоді  $V=2\pi r/P_{\text{орб}} = 6.28 \cdot \frac{0.2 \cdot 150 \cdot 10^6}{86400 \cdot 12} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 6.28}{864 \cdot 12} = 182 \text{m/s}$  (2 бала).

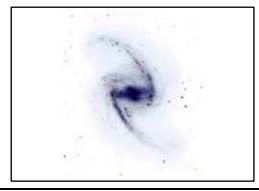
З формули Доплера відомо  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c}$  звідси  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c}$

$\frac{V}{c} = 6 \cdot 10^{-4}$  (1 бал).

Виконані вірно всі цифрові розрахунки (2 бала).

*Інтерпретація результату:* Пульсар рухається по орбіті діаметром  $2r=0.4$  а.од. Випромінювання пульсара буде приходити до спостерігача на  $\frac{0.4 \cdot 150 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5} = 200 \text{с}$  від самої віддаленої точки орбіти пізніше ніж від самої

близької. На період  $P_o=0.1$  с. Це і буде зміна порядку  $\frac{0.1 \text{с}}{200} = 0.5 \cdot 10^{-4}$



### Задача 3

**Колапс зорі.** В надрах зір з масою  $M > 10 - 12 M_{\text{sun}}$  відбувається термоядерний синтез елементів аж до утворення елементів залізного піку (Fe, Co, Ni). Ядро зорі з цих елементів масою  $M_{\text{я}} \approx 1,5 - 2 M_{\text{sun}}$  зазнає ряд нестійкостей і колапсує у нейтронну зорю (цей процес, як правило, супроводжується спалахом наднової II типу). Оцініть:

- характерний час колапсу;
- енергію, яка вивільняється при цьому та порівняйте її з енергією, що була виділена Сонцем за весь час його існування;
- потенційно можливу потужність (світність) цього процесу.

**Вказівка:** вважайте, що народжена нейтронна зоря має радіус  $R \sim 10$  км, а щільність залізного ядра надгіганта  $\rho \sim 10^9$  кг/м<sup>3</sup>.

(12 балів)

### Розв'язок

а) Гравітаційний колапс відбувається у так званій динамічній (гідродинамічній) шкалі часу. Цей час можна отримати, якщо розглянути падіння довільної частинки (наприклад, протона) з поверхні ядра зорі до її центру і вважати, що цей рух відбувається по дузі дуже витягнутого еліпсу з фокусом у центрі зорі. Велика піввісь цього еліпсу, очевидно, дорівнює  $a = R_{\text{я}}/2$  (див. рис. 1).

Шуканий час – це половина періоду обертання по еліпсу  $t_d = T/2$ . Вважаючи, що маса зорі зосереджена в її центрі та застосовуючи третій закон Кеплера, дістаємо (враховуючи малість нейтронної зорі порівняно з розмірами ядра надгіганта)

$$t_d = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_{\text{я}}^3}{2GM_{\text{я}}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_{\text{я}}}} \approx 2 \text{ с.}$$

б) Виділення енергії відбувається за рахунок зміни власної гравітаційної енергії, тому

$$\Delta W \approx \left| -\frac{GM_{\text{я}}^2}{R_{\text{нз}}} - \left( -\frac{GM_{\text{я}}^2}{R_{\text{я}}} \right) \right| \approx \frac{GM_{\text{я}}^2}{R_{\text{нз}}},$$

оскільки  $R_{\text{я}} \gg R_{\text{нз}}$ ,  $R_{\text{нз}}$  – радіус нейтронної зорі. За розрахунками для  $M_{\text{я}} = 1,5 M_{\text{sun}}$   $\Delta W = 6 \cdot 10^{46}$  Дж. Енергія, яку виділило Сонце за весь час свого

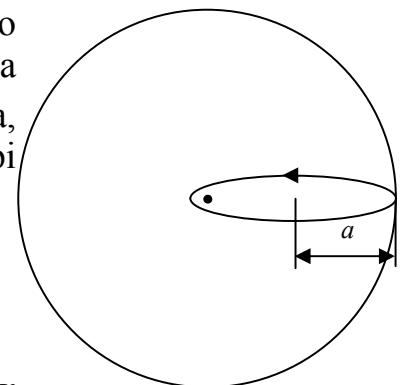
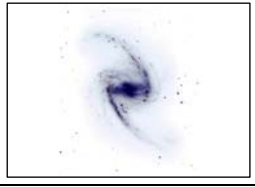


Рис.1

<p><b>III Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Київ, 24-28 березня 2013 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

існування (припускаючи сталість  $L_{\text{Sun}}$  і час життя  $5 \cdot 10^9$  років), становить  $\Delta W = 6 \cdot 10^{43}$  Дж, що у 1000 разів менше.

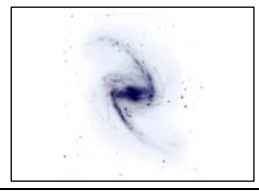
в) Енергія, що вивільняється за одиницю часу під час гравітаційного колапсу дорівнює

$$L \approx \frac{\Delta W}{t_d} = 3 \cdot 10^{46} \text{ Дж/с} \sim 10^{20} L_{\text{Sun}}.$$

Це майже на 8 порядків більше, ніж випромінює Туманність Андромеди. Проте більшу частину цієї енергії уносять нейтрино.

### **Розбаловка**

1. Розв'язання пункту а) із застосуванням третього узагальненого закону Кеплера – 6 балів.
2. Розв'язання пункту б) – 4 балів.
3. Розв'язання пункту в) – 2 бали.

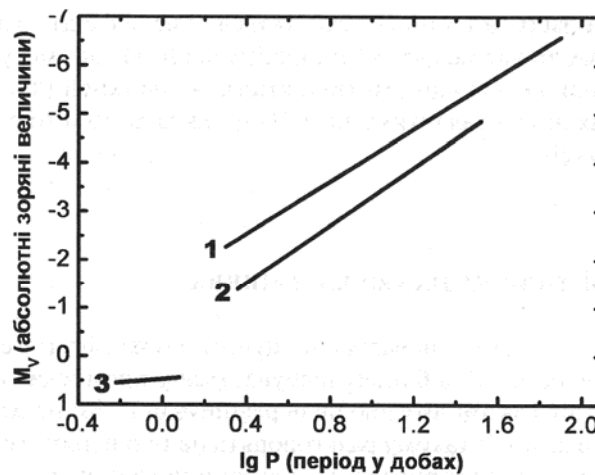


*Задача 4*

**Газо-пилова туманність.** Класична цефеїда, яка знаходиться на околиці газо-пилової туманності з кутовими розмірами  $1^\circ$ , виглядає зорею  $12^m$  і має період пульсацій 10 діб. Густина газо-пилової туманності  $10^{-19}$  кг/м<sup>3</sup>.

Знайти:

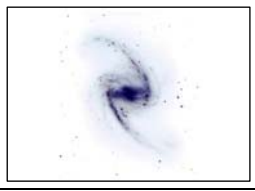
- 1) абсолютну зоряну величину зорі,
  - 2) віддаль до туманності,
  - 3) лінійні розміри туманності,
  - 4) масу туманності в масах Сонця.
- (8 балів)



Схематичне зображення залежності період — світність для цефеїд (1), віргінід (2), а також зір типу RR Ліри (3)

**Розв'язок**

1. Абсолютну зоряну величину ( $M$ ) знаходимо за графіком. Вона буде рівною  $-4^m$ . (2 бали)
2. Відстань до туманності знаходимо з формули:  $M = m + 5 - 5 \lg D$  пк.  
 $\lg D = 4,2$ .  $D \approx 1,58 \cdot 10^4$  пк. (4 балів)
3. Розміри сферичної туманності:  $d \approx D \cdot \alpha$ ; де  $\alpha$  – кутовий розмір туманності (в радіанах),  $d \approx 276$  пк, (1 бали)
4. Маса туманності:  $M = 4/3 \pi R^3 \cdot \rho$ ;  $\rho = 10^{-19}$  кг/м. Ураховуючи, що  $1 \text{ пк} = 3 \cdot 10^{16} \text{ м}$ , отримаємо:  $M \approx 2,95 \cdot 10^{37}$  (кг), або  $1,5 \cdot 10^7$  мас Сонця. (1 бал).



### Задача 5

**Дивне затемнення.** Коли ми спостерігаємо або фотографуємо сонячне затемнення, ми бачимо, що темний диск Місяця дорівнює за розміром диску Сонця (фото 1). На фото 2 також знято диск Місяця на фоні Сонця, але на ньому ми бачимо, що розмір диска Місяця в декілька разів менший. Як пояснити таку різницю? Відповідь обґрунтуйте.

Нагадуємо, що радіус Місяця приблизно 1700 км, а радіус Сонця – приблизно 700 000 км.



Фото 1

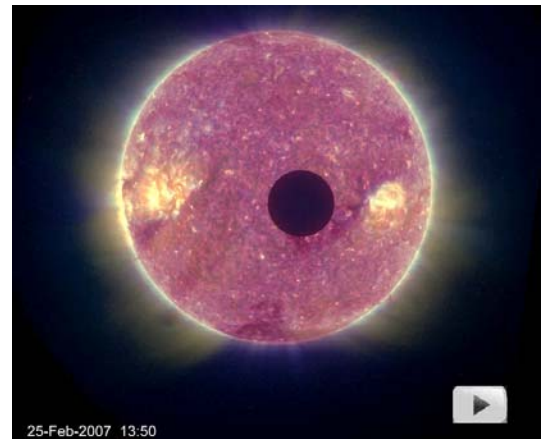


Фото 2

(8 балів)

### Розв'язок

Уявіть собі, що ви цілком закрили від себе Сонце футбольним м'ячем. При цьому ваше око, Сонце та м'яч знаходяться на одній прямій.

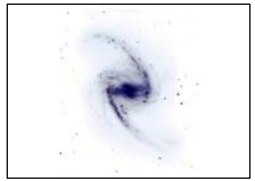
Якщо поступово віддалятися від м'яча (залишаючись на тій же прямій), ви вийдете з його тіни та знову побачите Сонце. І чим далі ви будете віддалятися від м'яча, тим менше буде його видимий розмір на фоні Сонця.

З малюнку випливає, що видимий кутівий розмір Місяця  $\varphi = R/r$  обернено пропорційний відстані до нього від місця зйомки:

$$\varphi_1 = R/r_1$$

$$\varphi_2 = R/r_2,$$

це означає, що

<p>III Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p>м. Київ, 24-28 березня 2013 р.</p>		<p>Теоретичний тур</p> <p>11 клас</p>
---	---	---------------------------------------

$$\varphi_1/\varphi_2=r_2/r_1 \quad (1).$$

З іншого боку, з того ж малюнку видно

$$\varphi_1=R_{\varphi 1}/L$$

$$\varphi_2=R_{\varphi 2}/L,$$

де  $L$  – відстань від лінзи фотоапарату до зображення Місяця.

Якщо вважати цю відстань однаковою для обох знімків, отримаємо

$$\varphi_1/\varphi_2= R_{\varphi 1}/R_{\varphi 2} \quad (2),$$

звідки маємо

$$r_2/r_1= R_{\varphi 1}/R_{\varphi 2},$$

або

$$r_2 = r_1 \cdot (R_{\varphi 1}/R_{\varphi 2})$$

Виміряємо по фото  $R_{\varphi 1}/R_{\varphi 2}=5$ , тоді, враховуючи, що  $r_1 \approx 400000$  км, отримаємо

$$r_2 \approx 2000000 \text{ км.}$$

Так воно й було: фото 2 було одержано з космічного корабля «Стерео-Б», коли він знаходився більш ніж в мільйоні кілометрів від Місяця. Фото 1, певна річ, одержано з Землі. Цим і пояснюється розбіжність фотографій.

***Кількість балів:***

1. Пояснення ефекту: зйомка з більшої відстані, зменшення кутового розміра – 2 бали.
2. Малюнок(креслення) з визначенням лінійних розмірів, відстаней і кутів – 2 бали.
3. Розрахунок з допомогою формул, фінальна формула для відстані – 3 бали.
4. Числовий результат для відстані 2млн км – 1 бал.