*Задача 1*

**Вимірювання радіуса Землі.** Щоб виміряти радіус Землі, ще з часів давньогрецького вченого Ератосфена користувалися вимірами максимальної висоти Сонця в той самий день року в двох пунктах на земній поверхні. Припустимо, що такі виміри здійснюються у населених пунктах, розташованих на одному меридіані на відстані приблизно 50 км один від одного. З якою похибкою потрібно було б виміряти цю відстань, щоб отримати точність визначення радіусу Землі не гірше 100 км? Для обчислень можна використати сучасне середнє значення радіусу Землі 6371 км. Виміри висоти Сонця вважати точними.

(8 балів)

**Розв'язок**

Нехай  $\Delta\varphi$  – різниця у висоті Сонця в двох пунктах,  $d$  – відстань між пунктами по меридіану,  $R$  – радіус Землі.  $\Delta\varphi$  буде дорівнювати куту між радіусами, що проведені в точки спостережень (див. малюнок).

(2 бали)

Складемо пропорцію

$$\frac{d}{2\pi R} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow d = R\Delta\varphi,$$

тут  $\Delta\varphi$  – в радіанах. В даному випадку  $\Delta\varphi \approx 7,85 \cdot 10^{-3}$  радіан (Знак «приблизно» пов'язаний з тим, що точне  $\Delta\varphi$  залежить від точного значення відстані).

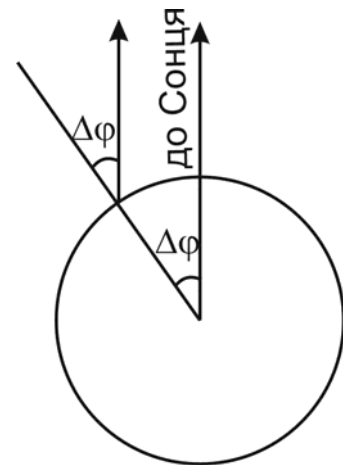
(3 бали)

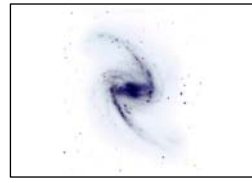
Нехай  $\delta R$  – похибка обчислення радіусу, а  $\delta d$  – похибка визначення відстані. Тоді

$$d + \delta d = (R + \delta R)\Delta\varphi$$

і, підставляючи потрібні значення, отримуємо  $\delta d = 797$  м (3 бали).

Похибка вимірювань відстані повинна бути не більше  $\sim 800$  м.

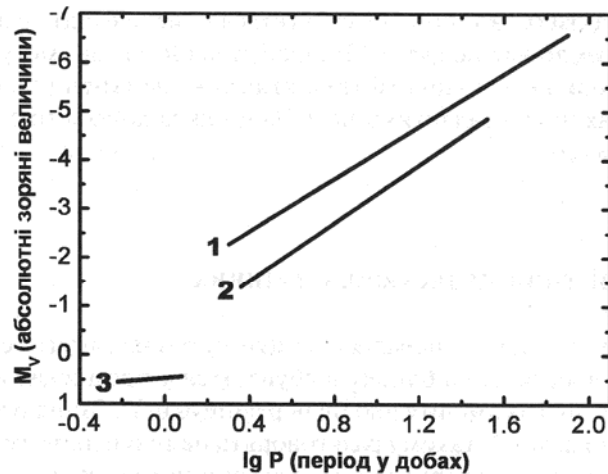




## Задача 2

**Газо-пилова туманність.** Класична цефеїда, яка знаходиться на околиці газо-пилової туманності з кутовими розмірами  $1^\circ$ , виглядає зорею  $12^m$  і має період пульсацій 10 діб. Густина газо-пилової туманності  $10^{-19}$  кг/м<sup>3</sup>. Знайти:

- 1) абсолютну зоряну величину зорі, 2) віддаль до туманності,
- 3) лінійні розміри туманності, 4) масу туманності в масах Сонця.



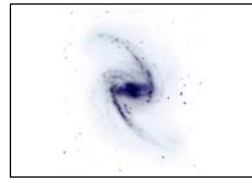
Схематичне зображення залежності період — світність для цефеїд (1), віргінід (2), а також зір типу RR Ліри (3)

*Пояснення до рисунка:* період  $P$  на графіку подано у логарифмічній шкалі, перехід до лінійної здійснюється за простим алгоритмом:  $P=10^x$ , де  $x$  є значенням періоду в логарифмічній шкалі вздовж осі абсцис.

(10 балів)

**Розв'язок**

1. Абсолютну зоряну величину ( $M$ ) знаходимо за графіком. Вона буде рівною  $-4^m$ . (2 бали)
2. Відстань до туманності знаходимо з формули:  $M = m + 5 - 5 \lg D$  пк.  
 $\lg D = 4,2$ .  $D \approx 1,58 \cdot 10^4$  пк. (4 балів)
3. Розміри сферичної туманності:  $d \approx D \cdot \alpha$ ; де  $\alpha$  – кутовий розмір туманності (в радіанах),  $d \approx 276$  пк, (1 бали)
4. Маса туманності:  $M = 4/3 \pi R^3 \cdot \rho$ ;  $\rho = 10^{-19}$  кг/м. Ураховуючи, що 1 пк =  $3 \cdot 10^{16}$  м, отримаємо:  $M \approx 2,95 \cdot 10^{37}$  (кг), або  $1,5 \cdot 10^7$  мас Сонця. (1 бал).

**Задача 3**

**Перетікання речовини у подвійній системі.** Нехай у подвійній системі відбулося перенесення речовини з головного компоненту А на компонент В. Визначте, як після цього зміняться великі півосі  $a_A$  та  $a_B$  компонентів, якщо спочатку їх маси були  $M_A$  та  $M_B$  ( $M_A > M_B$ ), і маса кожної зорі змінилася на величину  $\Delta M$  (консервативне перенесення). Вважайте, що  $\Delta M \ll M_A$  та  $M_B$ .

(12 балів)

**Розв'язок**

Згідно з третім законом Кеплера велика піввісь відносної орбіти подвійної системи (компонента В відносно компонента А) не змінюється, оскільки

$$\frac{T^2(M_A - \Delta M + M_B + \Delta M)}{a^3} = \frac{T^2(M_A + M_B)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

(3 бали)

Великі ж півосі компонентів, що вимірюються відносно центра мас системи, змінюються. Визначимо ці зміни.

Відомо, що відношення  $a_A / a_B$  обернено пропорційно відношенню мас компонентів, тобто

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{M_B}{M_A}$$

(2 бали).

Після перенесення речовини матимемо

$$\frac{a'_A}{a'_B} = \frac{M_B + \Delta M}{M_A - \Delta M} = \frac{M_B \left(1 + \frac{\Delta M}{M_B}\right)}{M_A \left(1 - \frac{\Delta M}{M_A}\right)} \approx \frac{M_B}{M_A} \left(1 + \frac{\Delta M}{M_A}\right) \left(1 + \frac{\Delta M}{M_B}\right)$$

(3 бали).

Тут враховано, що  $\Delta M / M_A \ll 1$ . Із цього виразу добре видно, що внаслідок такої зміни мас компонентів нова велика піввісь компонента А збільшується, а компонента В – зменшується.

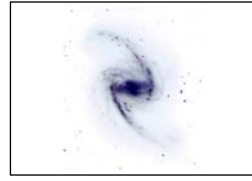
Оскільки відносна велика піввісь не змінюється, то

$$a_A + a_B = a'_A + a'_B.$$

III Всеукраїнська учнівська

олімпіада з астрономії

м. Київ, 24-28 березня 2013 р.



Теоретичний тур

10 клас

Розглядаючи останні дві рівності як систему рівнянь і розв'язуючи її, отримуємо

$$a'_A = (a_A + a_B) \left[ 1 + \frac{M_A}{M_B \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_A} \right) \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_B} \right)} \right]^{-1},$$

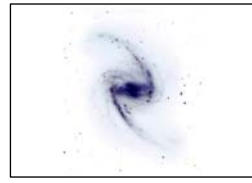
$$a'_B = (a_A + a_B) \left[ 1 + \frac{M_B}{M_A \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_A} \right) \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_B} \right)} \right]^{-1}$$

(4 бали).

III Всеукраїнська учнівська

олімпіада з астрономії

м. Київ, 24-28 березня 2013 р.



Теоретичний тур

10 клас

#### Задача 4

**Челябінський метеорит.** 15 лютого 2013 року над Челябінськом вибухнув метеорит. За оцінками астрономів метеорне тіло мало розміри приблизно 15 м. Якщо допустити, що це тіло мало кулясту форму і альbedo як у Місяця (7%), визначити, який був його блиск на відстані Місяця від Землі? Вважати, що освітлена сторона цього метеорного тіла була повернута до Землі в момент спостереження. Яким повинен бути діаметр об'єктива телескопа  $D$  (мм) в Київському астрономічному клубі «Астрополіс», щоб його члени вночі побачили це тіло?

(10 балів)

#### Розв'язок

Блиск метеорного тіла в районі орбіти Місяця:

$$E_1/E_2 = (R_2/R_1)^2 \quad E_1/E_2 = (3400000\text{м}/15\text{м})^2 = 60444442933,331 \approx 60 \times 10^9 \text{ раз}$$

(3 бали).

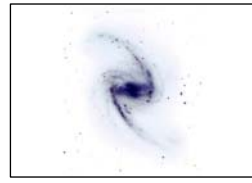
Різниця зоряних величин повного Місяця і метеорного тіла буде рівною:

$$\lg 60 \times 10^9 = 0,4 (m_2 - m_1). \quad \lg 60 \times 10^9 = 10,77. \quad m_2 - m_1 = 10,77 / 0,4. \quad m_2 - m_1 = 27^m \text{ (3 бали)}.$$

Якщо Місяць має  $-13^m$ , тоді метеорне тіло матиме  $14^m$ . За формулою проникної здатності телескопа  $m = 2,1 + 5 \lg D$  мм знаходимо:

$$5 \lg D = 14 - 2,1; \quad \lg D = 2,38; \quad D \approx 240\text{мм}$$

(4 бали)



*Задача 5*

**Транзит Венери.** 6 червня 2012 р. сотні вчених і тисячі любителів астрономії у всьому світі слідкували за достатньо рідкісним астрономічним явищем – транзитом Венери по диску Сонця. На рисунку показано зображення даного явища, отримане обсерваторією сонячної динаміки (SDO) Американського космічного агентства (NASA).

Припустивши, що фотографію було зроблено з поверхні Землі, визначте за знімком реальний діаметр Венери, якщо у момент транзитів відстані від Землі до Сонця і Венери до Сонця становили відповідно  $r_1 = 1,015 \text{ a.o.}$  і  $r_2 = 0,725 \text{ a.o.}$  Кутовий діаметр Сонця  $32'$ .

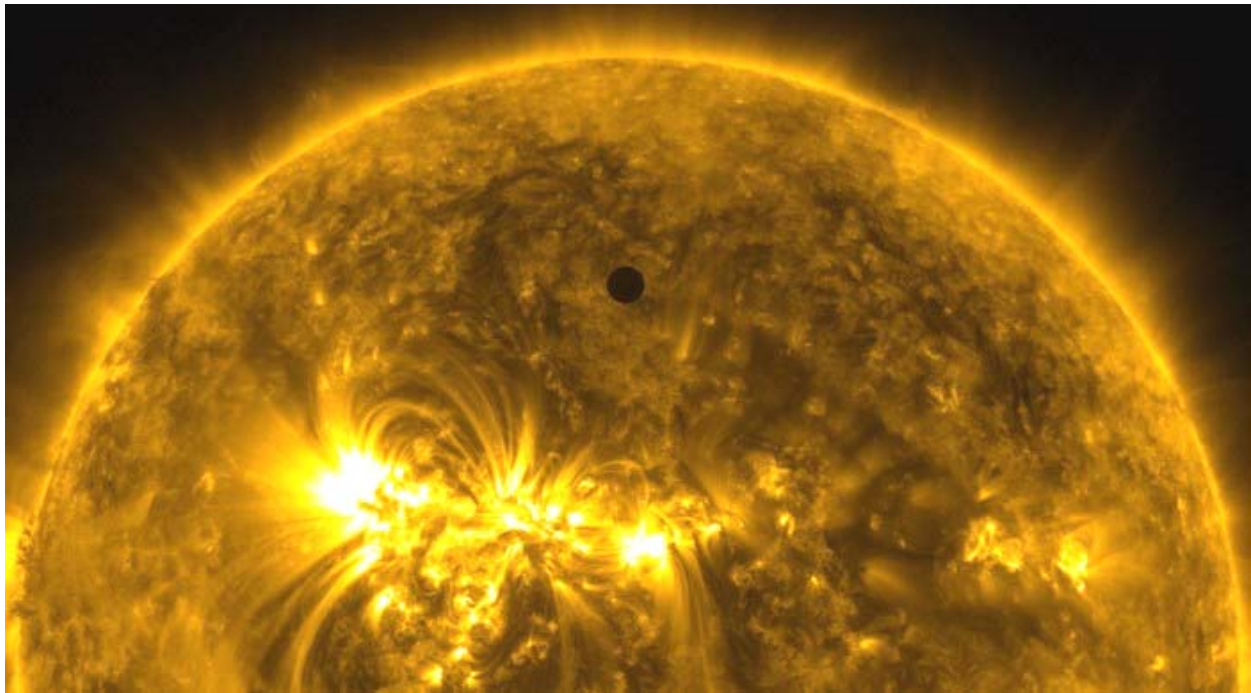
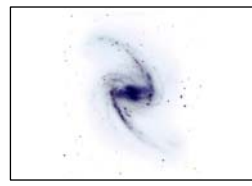


Рис. 1.

*(10 балів)*



### Розв'язок

Для визначення діаметру Венери проведемо наступні міркування:

1. Для спостерігача, який знаходиться на Землі, кут  $\gamma$  під яким він

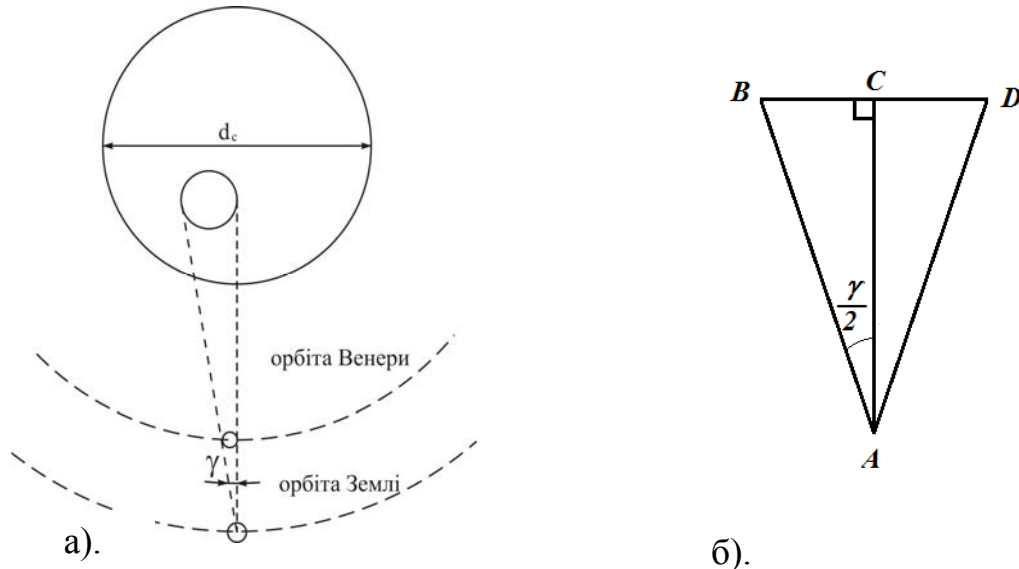


Рис. 2.

бачить Венеру та її проекцію (на Сонці) є однаковим (рис. 2.а). З прямокутного  $\triangle ACB$  (в якому  $BC$  – радіус Венери,  $AC$  – відстань від Землі до Венери, а земний спостерігач знаходиться у т.  $A$ ), визначимо:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{D_V}{2}}{r_1 - r_2},$$

(рис. 2.б) де  $D_V$  – діаметр Венери,  $r_1$  - відстань від Землі до Сонця,  $r_2$  - відстань від Венери до Сонця.

Оскільки при малих кутах синус і тангенс кута, вираженого в радіанах, дорівнюють самому куту, то можна наближено записати:

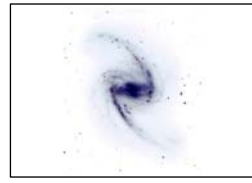
$$\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\frac{D_V}{2}}{r_1 - r_2}.$$

Отже значення шуканого кута в радіанах становитиме:  $\gamma = \frac{D_V}{r_1 - r_2}$

і, відповідно, діаметр Венери:

$$D_V = \gamma \cdot (r_1 - r_2) \quad (1)$$

2. За фотографією вимірюємо діаметр зображення диску Сонця  $d$  і діаметр зображення Венери  $d_V$  (рис. 1). За відомим кутовим діаметром візуально спостережуваного диску Сонця  $\alpha$  можна визначити кутовий масштаб зображення (рис.1):



$$\mu = \frac{\alpha}{d} \quad (2)$$

За кутовим масштабом (2) можна визначити кутовий діаметр проєкції Венери на диску Сонця:

$$\gamma = \mu \cdot d_V = \frac{\alpha \cdot d_V}{d} \quad (3)$$

Виразивши  $\alpha$  в радіанній мірі, та підставивши (3) в (1), отримаємо:

$$D_V = \gamma \cdot (r_1 - r_2) = \frac{\alpha \cdot d_V \cdot (r_1 - r_2)}{d} \quad (4)$$

3. Обчислимо шукане значення діаметру Венери:

а). Експериментальні дані:

$$d_V = 5 \text{ мм.}$$

$$d = 163 \text{ мм.}$$

$$1 \text{ а.о.} = 149600000 \text{ км}$$

б). Розрахункові дані:

$$\alpha = 32' \approx 0^{\circ},53.$$

$$\alpha(\text{рад.}) = \frac{\pi \cdot 0,53}{180^{\circ}} = 0,0093(\text{рад.})$$

$$D_V = \frac{0,0093 \cdot 5 \text{ мм.} \cdot (1,015 \text{ а.о.} - 0,725 \text{ а.о.})}{163 \text{ мм.}} = 8,27 \cdot 10^{-5} \text{ а.о.} = 12372 \text{ км.}$$

Порівнюючи отримане значення діаметра Венери з довідниковим  $D = 12124 \text{ км}$ , можна помітити, що отримані результати збігаються з реальними з точністю до  $\varepsilon = 2\%$ , що дозволяє говорити про об'єктивність проведених вимірювань.

#### Критерії оцінювання розв'язку задачі

Графічна інтерпретація умови задачі.	2 бали
Наявність та правильність вимірювання за фотографією експериментальних даних.	1 бал
Визначення кутового масштабу зображення.	2 бали
Відшукання формули для визначення діаметру Венери.	4 бали
Проведення числових обрахунків та їх оцінка.	1 бал